Serie 1

Geraden und lineare Gleichungssysteme, Ebenen, Fibonacci-Einführung
Abgabe 28.09.2020

Wichtige Hinweise. Diese erste Übungsserie ist ungewöhnlich in dem Sinne, dass sie nicht wie sonst üblich auf der Vorlesung aufbaut, sondern auf Ihrem Vorwissen und der ersten Übungsstunde. Es könnte Ihnen auch helfen, Abschnitt 0.2 in [F][1] zu lesen.
Aufgaben, für welche eine Punktzahl angegeben ist, können und sollten Sie abgeben, um Punkte zu bekommen. Details zur Abgabe und zu dem Notenbonus, den Sie damit erreichen können, erfahren Sie in der ersten Übungsstunde oder auf der Website der Vorlesung `https://metaphor.ethz.ch/x/2020/hs/401-1151-00L/`.

Sei $\mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen. Die Aufgaben 1-4 auf dieser Serie behandeln lineare Gleichungssysteme und Geraden im zweidimensionalen reellen Raum $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Definition (0.2.4 in [F])**.** *Eine Teilmenge $L \subset \mathbb{R}^2$ heißt* Gerade*, wenn es $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ gibt, sodass*

$$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\right\}.$$

Eine Gerade ist also die Lösungsmenge einer linearen Gleichung der Form $ax+by = c$ für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$.
Durch zwei verschiedene Punkte $v, v' \in \mathbb{R}^2$ geht genau eine Gerade L.[2] Es ist $w := v' - v \neq 0$ und die Punkte auf der Geraden L durch v und v' kann man unter Benutzung eines reellen *Paramters* t darstellen als

$$L = \left\{\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{es gibt ein } t \in \mathbb{R} \text{ mit } \mathbf{x} = v + tw\right\}$$

Dies wird die *Parameterdarstellung* (oder *parametrisierte Form*) von L genannt.

1. Fassen Sie $\mathbb{R}^2$ als die xy-Ebene mit den üblichen kartesischen Koordinaten auf. Zeichnen Sie (für jede Teilaufgabe jeweils in dasselbe Koordinatensystem) die Geraden
   (a) $L_i = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x = i\right\}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$.
   (b) $L_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 2\right\}, L_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 18\right\}$ und
   $L_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 17\right\}$.

   Finden Sie jeweils eine Parameterdarstellung der Geraden.
   Spielen Sie mit den Parametern in der Anwendung unter `https://www.geogebra.org/m/zmfwkcsg#material/Prnw45eJ`, wenn Ihnen diese Aufgabe schwer fällt.

2. Sei $L = \{v + tw \mid t \in \mathbb{R}\}$ mit $v, w \in \mathbb{R}^2$ eine Gerade in parametrisierter Form und sei $v' \in L$. Zeigen Sie, dass $L = \{v' + tw \mid t \in \mathbb{R}\}$. (2)

3. Betrachten Sie die folgenden drei linearen Gleichungssysteme: (2)

$$\text{(i)}\ \begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ x + y &= -1 \end{aligned} \qquad \text{(ii)}\ \begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 3x + 6y &= 3 \end{aligned} \qquad \text{(iii)}\ \begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 2x + 4y &= 1 \end{aligned}$$

   Für jedes System tun Sie Folgendes:
   (a) Lösen Sie es.
   (b) Zeichnen Sie die Lösungsmenge jeder der beiden Gleichungen als eine Gerade in der xy-Ebene und finden Sie die Schnittmenge der beiden Geraden.
   (c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen (a) und (b)?

[1] [F] G. Fischer: Lineare Algebra. Springer-Verlag 2014.
[2] Die zugehörige lineare Gleichung findet man durch Einsetzen der Koordinaten von v bzw. v' in $ax + by = c$ und Auflösen des entstehenden Gleichungssystems.

(d) Wenn das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat, parametrisieren Sie diese durch einen Parameter t.

4. Stellen Sie die folgenden Geraden jeweils als die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $ax+by=c$ dar.
   (a) $L_a = \left\{(3,0) + t\left(\frac{17}{2}, 0\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$
   (b) $L_b = \{(4,3) + t\,(13,9) \mid t \in \mathbb{R}\}$

In der nächsten Aufgabe betrachten wir eine Ebene im dreidimensionalen reellen Raum

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}.$$

Definition (0.3.2 in [F])**.** *Eine Teilmenge* $E \subset \mathbb{R}^3$ *heißt* Ebene*, wenn es Zahlen* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ *mit* $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ *gibt, sodass*

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\right\}.$$

Auch eine Ebene im Raum kann man noch anders darstellen in parametrisierter Form. Details dazu können Sie nachlesen in Abschnitt 0.3.3 in [F].

5. Gegeben sei die Ebene $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 5y + 6z = 12\right\}$ im dreidimensionalen reellen Raum $\mathbb{R}^3$. Stellen Sie E in *parametrisierter Form dar*, d.h. finden Sie Vektoren $u,v,w \in \mathbb{R}^3$, sodass $E = \{u + sv + tw \mid s,t \in \mathbb{R}\}$. (2)

Die folgende Aufgabe bezieht sich auf die Fibonacci-Einführung. In der Einführung wurde versucht, einen Überblick über die ganze Vorlesung zu geben. Dementsprechend haben Sie vielleicht nicht alles verstanden. Sie sollten den folgenden Vorlesungen gut folgen können, ohne diese Einführung verstanden zu haben. Trotzdem kann es helfen, die Einführung nochmal zu lesen. In der folgenden Aufgabe können Sie herausfinden, ob sie die Hauptpunkte der Einführung verstanden haben.

6. (a) (Übung 1.13 im Einführungskript) Verifizieren Sie, dass

$$\frac{1}{\varphi - \psi}\mathcal{G}_\varphi + \frac{1}{\psi - \varphi}\mathcal{G}_\psi = \mathcal{F}_{0,1},$$

   in dem Sie ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten lösen.
   (b) Finden Sie eine Formel für das n-te Folgenglied von $\mathcal{F}_{a,b}$.